Statistica & Applicazioni, Vol. I, n. 1, 2003, pp. 67-84

Verifiche d'ipotesi su medie aritmetiche ponderate dei parametri di una variabile casuale multinomiale[1]

Alessandro Zini
Università di Milano-Bicocca, e-mail:alessandro.zini@unimib.it

Summary: *In this work the hypothesis testing problem that a weighted mean of the probabilities of a multinomial distribution does not exceed a target value, with unilateral alterative will be studyed. Two kinds of tests will be considered: an "analigical" test and a likelihood ratio-based test. The former, though not asymptotically similar, turns out to be useful in finding the sample size when both error probabilities are fixed. The latter, which is asymptotically optimal, is good when the sample size is not less than 50.*

Keywords: *Distribuzioni esatte , Rapporto di verosimiglianza, Stimatore BAN.*

1. Introduzione e simbologia

Si consideri il campionamento da una distribuzione multinomiale con *m* parametri indipendenti. Per tal esperimento la verosimiglianza è costituita dalla distribuzione multinomiale:

$$L(\vartheta) = p(n_1, \cdots, n_m | \vartheta) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m+1} n_j!} \prod_{i=1}^{m+1} \vartheta_i^{n_i} \ , \ n = \sum_{i=1}^{m+1} n_i$$

$$\vartheta = (\vartheta_1, \cdots, \vartheta_m)' \in \Omega = \left\{ \vartheta_i \geq 0 \ \ i = 1, \cdots, m : \sum_{i=1}^{m} \vartheta_i \leq 1 \right\}$$

$$\vartheta_{m+1} = 1 - \sum_{i=1}^{m} \vartheta_i \ .$$

Si tratta di proporre un test per il seguente problema di verifica d'ipotesi:

[1]Lavoro cofinanziato dal MIUR, "Aspetti descrittivi e inferenziali per il trattamento di dati categoriali", Anno 2002 – prot. 2002133957_004.

$$H_0 : \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i \leq M$$
$$H_1 : \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i > M \qquad (1)$$

ove $0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m < 1 \quad m \geq 2$.

Senza perdere in generalità si può assumere $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$. Infatti, dalla forma dei test (4) e (5), si evince che essi sono invarianti a trasformazioni di scala. Tale vincolo permette di interpretare $\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i$ come media ponderata. Pertanto, il problema consiste nel verificare se la media aritmetica ponderata delle probabilità ϑ_i di una variabile casuale multinomiale non ecceda un certo valore target *M*, con l'alternativa unilaterale. I pesi a_i della media ponderata e il valore target *M* dipendono dal problema da risolvere. I test proposti nel lavoro hanno validità generale, qualunque siano le scelte di tali quantità.

Applicazioni rilevanti si riferiscono al cosiddetto problema dell'analisi del demerito nell'ambito del controllo statistico della qualità, cui ci si riferirà, per la parte empirica di questo lavoro, a partire dall'*Esempio* del successivo paragrafo.

Nel seguito sarà utilizzata la seguente notazione:

$$\Omega_{H_0} = \left\{ \vartheta \in \Omega : \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i \leq M \right\}$$
$$\Omega_{H_1} = \left\{ \vartheta \in \Omega : \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i > M \right\}.$$

Per semplicità, nella costruzione dei test, si sceglierà *M* in modo tale che $\frac{M}{a_1} \leq 1$. Tale limitazione verrà rimossa a fine paragrafo 3.

Saranno proposti due tipi di test. Il primo consente di determinare l'ampiezza campionaria che garantisce valori delle probabilità d'errore di prima e di seconda specie prefissati (paragrafo 2). Il secondo, in linea con la teoria classica dei test, fissati probabilità d'errore di prima specie e ampiezza campionaria, determina il test (asintoticamente) uniformemente più potente (paragrafo 3).

2. Il test nel caso in cui le probabilità d'errore di prima e seconda specie siano fissate

Il primo problema che affrontiamo è quello di reperire un test – che chiameremo "analogico" – il quale determini la regione critica e la numerosità campionaria *n*, in modo che le probabilità d'errore di prima e seconda specie siano pari a certi valori prefissati.

Il test può costruirsi nel modo seguente: uno stimatore naturale di $\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i$ è $T = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{n_i}{n}$.

La distribuzione di *T* è asintoticamente normale con valore atteso $E(T) = \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i$ e varianza

$$Var(T) = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_i (1-\vartheta_i) - 2\sum_{i<j}\sum a_i a_j \vartheta_i \vartheta_j\right\} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_i - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i\right)^2\right\} \quad (2)$$

Sembra ragionevole respingere H_0 per valori elevati di *T*.

Vale il seguente:

Teorema 1

Al divergere di n:
a) la probabilità dell'errore di prima specie è massima se e solo se si verificano entrambe le seguenti condizioni:

i) $E(T)$ *è massima sotto* H_0, *cioè se* $\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i = M$

ii) $Var(T)$ *è massima sotto* H_0, *cioè pari a* $Var(T) = \frac{M(a_m - M)}{n}$.

b) fissata una particolare alternativa $\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i = M_1 \ (> M)$, *la probabilità d'errore di seconda specie è massima se* $\vartheta_1 = \cdots = \vartheta_{m-1} = 0$ *e* $\vartheta_m = \frac{M_1}{a_m}$.

Dimostrazione

a) Bisogna determinare la soglia critica *c* tale che

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Omega_{H_0}} P\{T > c | H_0\} = \sup_{\vartheta \in \Omega_{H_0}} \{1 - P\{T \le c | H_0\}\} \cong 1 - \min_{\vartheta \in \Omega_{H_0}} \Phi\left(\frac{c - E(T)}{\sqrt{Var(T)}}\right)$$

essendo Φ (.) la funzione di ripartizione della normale standardizzata.

Si consideri il sottospazio di equazione $\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i = N \quad (0 < N \le M)$.

Dalla (2) si ottiene:

$$Var(T) = \frac{1}{n}\left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_i (1-\vartheta_i) - 2\sum_{i<j}\sum a_i a_j \vartheta_i \vartheta_j \right\} =$$
$$= \frac{1}{n}\left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_i - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i \right)^2 \right\} = \frac{1}{n}\left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_i - N^2 \right\}.$$

)

Poiché $Var(T)$ è funzione crescente dei parametri ϑ_i, il suo estremo superiore si ha quando $\vartheta_1 = \cdots = \vartheta_{m-1} = 0$ e $\vartheta_m = \frac{N}{a_m}$, mentre l'estremo inferiore si ha quando $\vartheta_2 = \vartheta_3 = \cdots = \vartheta_m = 0$ e $\vartheta_1 = \frac{N}{a_1}$. Sostituendo tali punti nella formula precedente si ottiene:

$$\frac{N(a_1 - N)}{n} < Var(T) < \frac{N(a_m - N)}{n}.$$

Vale la seguente catena di relazioni:

$$\sup_{\vartheta \in \Omega_{H_0}} P\{T > c | H_0\} \cong 1 - \min_{0<N\le M} \Phi\left(\sqrt{n}\, \frac{c-N}{\sqrt{N(a_m - N)}} \right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\, \frac{c-M}{\sqrt{M(a_m - M)}} \right)$$

Ciò dimostra l'asserto.

b) Analogamente a quanto fatto al punto a), per la probabilità dell'errore di seconda specie, considerato $M_1 \ (> M)$, vale la seguente relazione:

$$\sup_{\vartheta_i \ge 0:\sum_{i=1}^{m} a_i\vartheta_i = M_1} P\{T \le c | H_1\} \cong \Phi\left(\sqrt{n}\, \frac{c - M_1}{\sqrt{M_1(a_m - M_1)}} \right) =$$
$$= \Phi\left(\sqrt{n}\, \frac{M - M_1}{\sqrt{M_1(a_m - M_1)}} + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{M(a_m - M)}{M_1(a_m - M_1)}} \right).$$

La prima uguaglianza porge la tesi. Dalla seconda si evince che il test (3), definito poco più avanti è consistente. ◆

La regione critica del test proposto è la seguente:

$$T \le c = M + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{M(a_m - M)}{n}}, \tag{3}$$

dove $z_{1-\alpha}$ rappresenta il quantile di ordine $1-\alpha$ della distribuzione normale standardizzata.

In conseguenza del teorema 1, il test è consistente, ma non è asintoticamente similare[2]. Nonostante ciò, per la semplicità della sua forma, esso può essere utile ai fini della determinazione dell'ampiezza campionaria che garantisce che le probabilità degli errori di prima e seconda specie siano uguali a certi valori prefissati, come mostra il seguente

Esempio (*Analisi del demerito*) Si consideri il seguente problema, presentato in Zenga (1969) p. 9. Si ispezionino n oggetti che possano presentare due tipologie di difetti D_1 e D_2. Se il campionamento è bernoulliano il modello di base è costituito dalla seguente tabella tetracorica:

Tabella 1. *Modello di base*

	D_1	$\overline{D}_1$
D_2	ϑ_3	ϑ_2
$\overline{D}_2$	ϑ_1	$1-\sum_{i=1}^{3}\vartheta_i$

Rispetto alla simbologia introdotta si è nel seguente caso particolare $m = 3$.

In questo contesto la (1) verifica se un'opportuna media aritmetica delle probabilità di difettosità sia minore o uguale ad un valore prefissato. La probabilità $1-\sum_{i=1}^{3}\vartheta_i$ della classe "residua" - pezzi che non presentano difetti – è, nelle applicazioni molto vicina all'unità.

Si applichi il test (3) alla seguente verifica d'ipotesi:

$$\begin{aligned} &H_0 : \sum_{i=1}^{3} a_i\vartheta_i = M \\ &H_1 : \sum_{i=1}^{3} a_i\vartheta_i = M_1(> M) \end{aligned}.$$

Fissato $a_1 = 0{,}2,\ a_2 = 0{,}3,\ a_3 = 0{,}5$, per il test (3) sono date le soglie critiche c e le numerosità campionarie n che si ottengono fissando, a titolo d'esempio, le probabilità di errore di prima specie $\alpha = 0{,}05$ e di seconda specie $\beta = 0{,}1$ (imponendo che sia massima) – si veda Iacobini (1991), capitolo 4.

Si tratta di risolvere il sistema:

---

[2] Un test si dice *asintoticamente similare* se la sua probabilità d'errore di prima specie al divergere di n tende ad α, per ogni vettore $(\vartheta_1,\cdots,\vartheta_m)' \in \omega$, ove ω indica la frontiera comune di Ω_{H_0} e Ω_{H_1}.

$$\begin{cases} \Phi\left(\sqrt{n}\,\dfrac{c-M}{\sqrt{M(a_3-M)}}\right)=1-\alpha \\ \Phi\left(\sqrt{n}\,\dfrac{c-M_1}{\sqrt{M_1(a_3-M_1)}}\right)=\beta \end{cases},$$

la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{cases} c=\dfrac{M-M_1\dfrac{z_{1-\alpha}}{z_\beta}\sqrt{\dfrac{M(a_3-M)}{M_1(a_3-M_1)}}}{1-\dfrac{z_{1-\alpha}}{z_\beta}\sqrt{\dfrac{M(a_3-M)}{M_1(a_3-M_1)}}} \\ n=\dfrac{M(a_3-M)}{(c-M)^2}z_{1-\alpha}^2 \end{cases}.$$

Vale la pena di osservare che il membro di destra della prima equazione è funzione decrescente di a_3. Inoltre, poiché *c* compare a denominatore del membro di destra della seconda equazione, segue che *n* è, a parità di tutto il resto, funzione crescente di a_3. Di conseguenza, l'ampiezza campionaria minima si ha in corrispondenza di pesi uniformi $a_3=\frac{1}{3}=a_2=a_1$, mentre l'ampiezza massima si ha in corrispondenza di $a_3=1,\ a_1=a_2=0\ \Rightarrow H_0:\vartheta_3=M$.

Nel prospetto seguente si confrontano la soglia critica *c* e l'ampiezza campionaria *n* del test (3) con i corrispettivi valori *c** e *n** del test su una sola variabile dicotomica:

$$\begin{aligned} &H_0: p=p_0 \\ &H_1: p=p_1(>p_0) \end{aligned}.$$

A titolo d'esempio, si opera il confronto imponendo $M=p_0$ e $M_1=p_1$. I valori di p_0 sono scelti secondo la pratica del controllo d'accettazione della qualità (si veda ad es. Montgomery (2000) p.530 e segg.): usualmente un fornitore abituale considera valori di p_0 non superiori all'1%; un generico produttore può essere interessato a valori fino al 10%: a titolo esemplificativo si è considerato il valore della probabilità dell'errore di prima specie – rischio del produttore/fornitore - α pari al 5% e il valore della probabilità dell'errore di seconda specie – rischio dell'acquirente - β pari al 10%. Si ottiene il seguente prospetto:

Tabella 2. *Soglie critiche e ampiezze campionarie dei test che considerano rispettivamente due e una tipologie di difetti, tenendo fissati α=0,5 e β=0,1*

$M = p_0$	$M_1 = p_1$	c	n	$c*$	$n*$
0,1	0,15	0,1264	155	0,1260	361
0,1	0,20	0,1512	41	0,1420	138
0,05	0,075	0,0630	361	0,0629	774
0,05	0,10	0,0745	101	0,0741	221
0,03	0,04	0,0353	1361	0,0353	2824
0,03	0,05	0,0401	375	0,0400	783
0,03	0,06	0,0445	181	0,0444	380
0,01	0,015	0,0123	2464	0,0126	4077
0,01	0,02	0,0148	579	0,0148	1176

Nel caso - riportato in Zenga (1996), p.109 - in cui si assuma $p_0 = 0{,}03$, $p_1 = 0{,}06$, posto $a_1 = 0{,}2,\ a_2 = 0{,}3,\ a_3 = 0{,}5$, dal prospetto si può notare che il test (3) prevede un numero di osservazioni $n = 181$, meno della metà del corrispettivo test per una sola variabile dicotomica ($n* = 380$).
Pertanto, qualora il valore della media aritmetica ponderata delle probabilità di difettosità sia prossimo alla probabilità di una sola di esse, l'ispezione di più caratteristiche consentirebbe un sostanziale risparmio d'osservazione rispetto all'ispezione di una sola caratteristica, una volta fissate le probabilità d'errore di prima e di seconda specie.

Si può concludere affermando che il test (3) può risultare utile ai fini della determinazione dell'ampiezza campionaria, qualora si fissino i valori delle probabilità d'errore.

3. Il test basato sul rapporto di verosimiglianza

E' noto che, al divergere di *n*, vale:

$$W = \frac{T - \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i}{\sqrt{Var(T)}} = \sqrt{n}\, \frac{T - \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_i (1 - \vartheta_i) - 2 \sum_{i<j} \sum a_i a_j \vartheta_i \vartheta_j}} \to N(0{,}1).$$

Al fine di costruire un test asintoticamente uniformemente più potente è necessario stimare $Var(T)$.

Una scelta adeguata è lo stimatore di massima verisimiglianza vincolata all'ipotesi nulla:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \hat{\vartheta}_i \left(1 - \hat{\vartheta}_i\right) - 2 \sum_{i<j} \sum a_i a_j \hat{\vartheta}_i \hat{\vartheta}_j \ ,$$

dove $\hat{\vartheta} = \left(\hat{\vartheta}_1, \cdots, \hat{\vartheta}_m\right)' : \ \sup_{\vartheta \in \Omega_{H_0}} L(\vartheta) = L\left(\hat{\vartheta}\right).$

Un test asintoticamente uniformemente più potente induce ad accettare H_0 se:

$$\sqrt{n}\,\frac{T-M}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \hat{\vartheta}_i\left(1-\hat{\vartheta}_i\right)-2\sum_{i<j}\sum a_i a_j \hat{\vartheta}_i \hat{\vartheta}_j}} \le z_{1-\alpha}\,, \tag{4}$$

Si costruisce, ora, un test basato sul rapporto di verosimiglianza, il quale, come si vedrà, prescrive di accettare H_0 se

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i n_i / n}{M + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{M\left(a_i - M\right)}{n}}} \le 1 \tag{5}$$

Nel seguito si dimostra che tale test è consistente e asintoticamente similare.
Si considera il rapporto di verosimiglianza:

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\vartheta\in\Omega_{H_0}} L(\vartheta)}{\sup\limits_{\vartheta\in\Omega} L(\vartheta)} = \frac{\sup\limits_{\vartheta\in\Omega_{H_0}} \prod\limits_{i=1}^{m+1} \vartheta_i^{n_i}}{\sup\limits_{\vartheta\in\Omega} \prod\limits_{i=1}^{m+1} \vartheta_i^{n_i}}\,. \tag{6}$$

Come è noto l'estremo superiore al denominatore si ha in corrispondenza di $\vartheta_i = \frac{n_i}{n}$.

L'estremo superiore del numeratore coinciderà con quello del denominatore per i punti dello spazio campionario nei quali vale $T = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{n_i}{n} \le M$ (e in tali casi $\lambda = 1$), mentre si troverà sull'insieme $A = \left\{\vartheta \in \Omega : \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i = M\right\}$ (e in tali casi $\lambda < 1$) per i punti dello spazio campionario nei quali vale $T > M$.
Pertanto, per i punti dello spazio campionario nei quali vale $T > M$, si può scrivere:

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\vartheta\in\Omega_{H_0}} L(\vartheta)}{\sup\limits_{\vartheta\in\Omega} L(\vartheta)} = \frac{\sup\limits_{\left\{\vartheta_i \ge 0 : \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i = M\right\}} L(\vartheta)}{\sup\limits_{\vartheta\in\Omega} L(\vartheta)}\,. \tag{7}$$

Se $T > M$, il massimo vincolato a numeratore della (7) può determinarsi mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Derivando la funzione lagrangiana:

$$H = \sum_{i=1}^{m+1} n_i \log \vartheta_i - \mu\left(\sum_{i=1}^{m+1} \vartheta_i - 1\right) - \nu\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i - M\right),$$

si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \vartheta_i} = n_i - (\mu + \nu \ a_i)\vartheta_i = 0 & i = 1, \cdots, m+1 \quad a_{m+1} \equiv 0 \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{m+1} \vartheta_i - 1 = 0 \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{m+1} a_i \vartheta_i - M = 0 \end{cases} .$$

Tale sistema può essere riscritto nella forma seguente:

$$\begin{cases} \hat{\vartheta}_i = \dfrac{n_i}{\hat{\mu} + \hat{\nu} a_i} = \dfrac{n_i}{n} \cdot \dfrac{n}{\hat{\mu} + \hat{\nu} a_i} & i = 1, \cdots, m+1 \\ n = \hat{\mu} + \hat{\nu} M \\ M = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{a_i n_i}{\hat{\mu} + \hat{\nu} a_i} \end{cases} . \tag{8}$$

Si noti che tale soluzione vale anche quando qualche a_i sia nullo.

Si consideri, ora, il seguente problema:

$$\begin{aligned} & H_0 : \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i = M \\ & H_1 : \sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i \neq M \end{aligned} . \tag{9}$$

Il rapporto di verosimiglianza può scriversi come segue:

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i = M} \prod_{i=1}^{m+1} \vartheta_i^{n_i}}{\sup\limits_{\vartheta \in \Omega} \prod_{i=1}^{m+1} \vartheta_i^{n_i}} = \frac{\prod_{i=1}^{m+1} \left(\hat{\vartheta}_i\right)^{n_i}}{\prod_{i=1}^{m+1} \left(\dfrac{n_i}{n}\right)^{n_i}},$$

dove $\hat{\vartheta}_i \quad i = 1, \cdots, m+1$ indica la soluzione del sistema (8). Dopo aver sviluppato in serie di Taylor i logaritmi intorno all'origine, $-2\log\lambda$ si può approssimare nel seguente modo:

$$-2\log\lambda = 2\sum_{i=1}^{m+1} n_i \log\left(1 + \frac{\delta_i}{n\hat{\vartheta}_i}\right) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\delta_i^2}{n\hat{\vartheta}_i} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\left(n_i - n\hat{\vartheta}_i\right)^2}{n\hat{\vartheta}_i} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{10}$$

dove $\delta_i = n_i - n\hat{\vartheta}_i$.

Ma, per un risultato statistico standard – Kendall e Stuart (1961), capitolo 24 -, essendo gli stimatori $\hat{\vartheta}_i$ i migliori stimatori asintoticamente normali (BAN), la (10) converge in legge ad una distribuzione $\chi^2(1)$.

Pertanto, la distribuzione di $V = -2\log\lambda$ per il problema (9) sotto H_0 converge in legge alla distribuzione chi quadrato con un grado di libertà.
Questo fatto, e il fatto che per i punti dello spazio campionario nei quali è $T > M$ vale la (7) suggeriscono di proporre per il corrispondente problema di verifica d'ipotesi unilaterale (1) il seguente test:
si accetta H_0 se:

$$\sqrt{-2\log\lambda} \le z_{1-\alpha}\,. \tag{11}$$

Per avere un'idea della forma della regione di accettazione del test (11), fissato $1 \le i \le m$ si prende in considerazione il valore del rapporto di verosimiglianza in corrispondenza della realizzazione campionaria:

$$n_i\ (\ > n\frac{M}{a_i}\text{, in quanto } T > M\ ),\ n_{m+1} = n - n_i,\ n_j = 0 \quad j \ne i\ . \tag{12}$$

Vale:

$$\lambda = \frac{\left(\frac{M}{a_i}\right)^{n_i}\left(1-\frac{M}{a_i}\right)^{n-n_i}}{\left(\frac{n_i}{n}\right)^{n_i}\left(1-\frac{n_i}{n}\right)^{n-n_i}}.$$

Posto $\delta_i \equiv n_i - n\frac{M}{a_i}$ e sviluppando il logaritmo in serie di Taylor intorno all'origine, si ottiene:

$$-2\log\lambda = 2\left(\delta_i^2\frac{a_i}{nM} + \delta_i - \frac{1}{2}\delta_i^2\frac{a_i}{nM}\right) - 2\left(\delta_i + \frac{1}{2}\frac{\delta_i^2}{n\left(1-\frac{M}{a_i}\right)} - \frac{\delta_i^2}{n\left(1-\frac{M}{a_i}\right)}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{\delta_i^2}{n\frac{M}{a_i}\left(1-\frac{M}{a_i}\right)} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

o, equivalentemente:

$$\sqrt{-2\log\lambda} = \frac{a_i\delta_i}{\sqrt{nM(a_i - M)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Quindi, qualora si osservino campioni di ampiezza elevata con valori appartenenti ad una sola modalità della distribuzione multinomiale, diciamo la i-esima, e alla modalità residua (realizzazione campionaria (12)), il test (11) prescrive di accettare H_0 se

$$\frac{a_i \delta_i}{\sqrt{nM(a_i - M)}} \leq z_{1-\alpha}, \tag{13}$$

con $\delta_i \equiv n_i - n \dfrac{M}{a_i}$.

In virtù della (13), per i valori di *j* tali che $\dfrac{M}{a_j} < 1$, la regione di accettazione del test (11) è delimitata da una superficie passante per i punti di coordinate:

$$\frac{n_j}{n} = \begin{cases} \dfrac{M}{a_i} + z_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{M}{n a_i}\left(1 - \dfrac{M}{a_i}\right)} & i = j \\ 0 & i \neq j = 1, \cdots, m \end{cases}. \tag{14}$$

Appare ragionevole, in accordo con la (13), approssimare tale superficie mediante l'iperpiano passante per i punti (14), che ha la seguente equazione:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i n_i}{nM + z_{1-\alpha}\sqrt{nM(a_i - M)}} = 1, \tag{15}$$

Pertanto, si propone il test (5), che prescrive di accettare H_0 se:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i n_i / n}{M + z_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{M(a_i - M)}{n}}} \leq 1.$$

Si osservi che, ripercorrendo passo passo il procedimento deduttivo utilizzato, la forma del test risulta la medesima anche qualora qualche a_i sia nullo.

Teorema 2

Il test (5) *è consistente*.

Dimostrazione

Per $(\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \cdots, \vartheta_{1m}) \in \Omega_{H_1}$ con $\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_{1i} = M_1$, vale, al divergere di *n*:

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i n_i / n}{M + z\sqrt{\dfrac{M(a_i - M)}{n}}} > 1 \right\} \geq P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i n_i / n}{M + z\sqrt{\dfrac{M(a_1 - M)}{n}}} > 1 \right\} =$$

$$= P\left\{ \frac{T - M_1}{\sqrt{Var(T)}} > \sqrt{n}\,\frac{(M - M_1)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_{1i} - M_1^2}} + z\sqrt{\frac{M(b_1 - M)}{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_{1i} - M_1^2}} \right\} \cong$$

$$\cong 1 - \Phi\left\{ \sqrt{n}\,\frac{(M - M_1)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_{1i} - M_1^2}} + z\sqrt{\frac{M(b_1 - M)}{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_{1i} - M_1^2}} \right\} \to 1. \qquad \blacklozenge$$

Teorema 3

Il test (5) *è asintoticamente similare*.

Dimostrazione

Per $(\vartheta_{01}, \vartheta_{02}, \cdots, \vartheta_{0m})$ tale che $\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_{0i} = M$, al divergere di *n*, l'insieme (5) è equivalente al seguente:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{a_i n_i / n}{M + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{M(a_i - M)}{n}}} - \frac{(a_i n_i / n) - M/m}{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_{0i}\right) - M^2}{n}}} + \frac{(a_i n_i / n) - M/m}{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_{0i}\right) - M^2}{n}}} \right] \le 1 \right\} =$$

$$\cong \left\{ \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i n_i / n\right) - M}{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_{0i}\right) - M^2}{n}}} \le 1 \right\},$$

da cui:

$$P\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i n_i / n\right) - M}{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_{0i}\right) - M^2}{n}}} \le 1\right\} = P\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i n_i / n\right) - M}{\sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \vartheta_{0i}\right) - M^2}{n}}} \le z_{1-\alpha}\right\} \cong 1-\alpha.$$

◆

Se qualche a_i fosse nullo si può eliminare il parametro ad esso associato, considerando il modello multinomiale marginale che contiene solo parametri non nulli. Inoltre, è possibile costruire un test analogo al (14) anche qualora qualche a_i sia minore di M oppure negativo. In tal caso si tratta di approssimare mediante un piano attraverso il seguente procedimento:

- si determinano i vettori (matrice $P(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_m)$) ottenuti mediante il sistema $\sum_{i=1}^{m} a_i \vartheta_i = M \wedge \delta\,\Omega$ (delta indica la frontiera) e si determinano le varianze in corrispondenza di tali punti;
- per ognuno dei vettori di $P\left(\frac{n_1}{n}, \cdots, \frac{n_m}{n}\right)$ si determinano le coordinate del sistema (14) ottenuto tramite il procedimento che permette di costruire la (13)
- si costruisce il piano passante per tali punti.

Il test (5) ha l'attrattiva di non dipendere da alcuna stima di $Var(T)$. Dai risultati numerici ottenuti mediante distribuzioni esatte, dei quali si mostra un esempio in Appendice B, e discussi nel prossimo paragrafo, emerge che, anche per piccoli campioni, le probabilità di prima specie effettive e la potenza sono praticamente coincidenti per i test (4) e (5) in tutti i casi esaminati. Pertanto, il test (5) è raccomandato. Tale test conserva le medesime proprietà asintotiche e la medesima forma anche qualora qualche a_i sia nullo. Pertanto, il test (5) consente di verificare che medie aritmetiche ponderate di $k(\le m)$ parametri non superino un certo valore target M, con alternativa unilaterale.

4. Risultati numerici

Per il test (3), in Appendice A, sono dati i valori delle probabilità d'errore di prima specie effettivi associati ad alcuni valori nominali α, per il caso $M = 0{,}03$, $m = k = 3$, con pesi a_i rispettivamente pari a 0,2; 0,3; 0,5 e ampiezza campionaria $n = 500$ per alcune distribuzioni.

Emerge che è molto grande il divario fra valori effettivi e nominali della probabilità d'errore di prima specie aumenta, a parità di tutto il resto all'allontanarsi di ϑ_3 dal valore $\frac{M}{a_3} = \frac{0,03}{0,5} = 0,06$, cioè all'allontanarsi di $Var(T)$ dal suo valore massimo: ciò riflette il fatto che il test non è asintoticamente similare.

Per quanto riguarda la verifica d'ipotesi con ampiezza campionaria predeterminata, si sono confrontati i comportamenti dei test (4) e (5), al variare dei valori dei parametri ϑ_i, del loro numero *m*, dei pesi a_i.

Utilizzando distribuzioni esatte, per i test (4) e (5), - per i pesi a_i rispettivamente pari a 0,2; 0,3; 0,5 – si sono determinati i valori effettivi della probabilità d'errore di prima specie in corrispondenza dei valori nominali α = 0.10, 0.075, 0.05, 0.025, per alcune distribuzioni che presentano $M = 0.005, 0.01, 0.05$, per ampiezze campionarie $n = 10, 20, 30, 40, 50, 75, 100, 150$. Un caso è riportato in Appendice B.

Si sono, poi, determinati i valori della funzione di potenza in corrispondenza dei suddetti valori nominali delle probabilità d'errore di prima specie, considerando $M_0 = 0.01$ per $M_1 = 0.015, 0.02$, e $M_0 = 0.05$ per $M_1 = 0.075, 0.1$, per alcune alternative, e, precisamente:

- per $\vartheta_1 - \varepsilon_1 = \frac{M_1}{a_1}$, ε_1 piccolo – potenza massima
- per $\vartheta_2 - \varepsilon_2 = \frac{M_1}{a_2}$, ε_2 piccolo
- per $\vartheta_3 - \varepsilon_3 = \frac{M_1}{a_3}$, ε_3 piccolo – potenza minima
- per $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = M_1$.

Dal confronto emergono i seguenti notevoli rilievi:

- I valori effettivi delle probabilità d'errore di prima specie e quelli della funzione di potenza per i test (5) e (4), a parità di ampiezza campionaria sono molto vicini e in molti casi coincidono al sesto decimale. Pertanto i due test sono praticamente equivalenti anche per piccoli campioni. Pertanto, l'utilizzo del test (5), il quale presenta la forte attrattiva di non richiedere la stima di $Var(T)$, è raccomandato.
- L'ampiezza campionaria minima a partire dalla quale si ottengono approssimazioni accettabili dei valori effettivi ai valori nominali della probabilità d'errore di prima specie diminuisce al crescere del valore *M*.

5. Conclusioni

Il test (3) consente di determinare le ampiezze campionarie che garantiscono che le probabilità degli errori siano pari a valori prefissati; per quanto mostrato a paragrafo 3, il maggior risparmio di osservazioni si ha in corrispondenza di pesi a_i uguali.

Qualora, invece, l'ampiezza campionaria risulti fissata, il test (5) si rivela appropriato al problema. Infatti, il test (5) ha l'attrattiva di non dipendere da alcuna stima di $Var(T)$. Dai risultati numerici ottenuti mediante distribuzioni esatte, dei quali si mostra un esempio in Appendice B, emerge che, anche per ampiezze campionarie piccole le probabilità di prima specie effettive e la potenza sono praticamente coincidenti per i test (4) e (5) in tutti i casi esaminati. Pertanto, il test (5) è raccomandato. Tale test conserva le medesime proprietà asintotiche e la medesima forma anche qualora qualche a_i sia nullo. Pertanto, il test (5) consente di verificare che medie aritmetiche ponderate di $k(\leq m)$ parametri non superino un certo valore target M, con alternativa unilaterale.

Esso esibisce in tutti i casi esaminati valori effettivi della probabilità d'errore di prima specie molto prossimi a quelli nominali, qualora si considerino almeno 50 osservazioni.

Appendice A

Valori delle probabilità d'errore di prima specie effettivi associati ad alcuni valori nominali α, per il caso $M = 0{,}03$, $m = k = 3$, con pesi a_i rispettivamente pari a 0,2; 0,3; 0,5 e ampiezza campionaria $n = 500$ per alcune distribuzioni.

Tabella 3. *Alcune distribuzioni che presentano M*=0,03

N° distribuzione	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
1	0,00101	0,00016	0,0595	0,93933
2	0,0175	0,005	0,05	0,9275
3	0,007	0,012	0,05	0,931
4	0,005	0,03	0,03	0,925
5	0,035	0,01	0,04	0,915
6	0,025	0,05	0,02	0,905
7	0,02	0,07	0,01	0,9
8	0,03	0,05	0,018	0,902
9	0,05	0,03	0,022	0,902
10	0,02	0,05	0,022	0,908
11	0,1	0,02	0,008	0,872

Tabella 4. *Probabilità d'errore di prima specie effettive, per distribuzione e per α nominale*

N° distribuzione α	0.20	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0,19150	0,10771	0,05591	0,02702	0,01338	0,00726
2	0,18503	0,09554	0,04706	0,02281	0,01020	0,00516
3	0,18690	0,09724	0,04830	0,02362	0,01067	0,00544
4	0,17816	0,08914	0,04235	0,01976	0,00845	0,00412
5	0,17226	0,08398	0,03876	0,01755	0,00726	0,00344
6	0,15252	0,06700	0,02743	0,01093	0,00390	0,00163
7	0,14113	0,05784	0,02183	0,00796	0,00257	0,00098
8	0,14855	0,06405	0,02560	0,00994	0,00345	0,00140
9	0,14886	0,06419	0,02575	0,01004	0,00351	0,00144
10	0,15607	0,06991	0,02927	0,01194	0,00439	0,00188
11	0,11470	0,03933	0,01209	0,00354	0,00089	0,00028

Appendice B

Per i pesi a_i rispettivamente pari a 0,2; 0,3; 0,5, con riferimento alla distribuzione $\{0.01,\ 0.016,\ 0.0064,\ 0.9676\}$ed $M = 0{,}01$(parte comune delle due tabelle) la tabella 5 riporta i valori di α effettivi in corrispondenza di alcuni valori di α nominali per il test (5). La tabella 6, invece, riporta i valori di α effettivi in corrispondenza dei medesimi valori di α nominali per il test (4). Per la determinazione delle stime $\hat{\vartheta}_i$ si ricorre alla soluzione del sistema (8). Tale soluzione è stata determinata per ogni possibile campione ricorrendo alla subroutine solve_system della libreria IMSL per il linguaggio C++.

Tabella 5. *Valori di* α *effettivi in corrispondenza di alcuni valori di* α *nominali per il test* (5)

Numerosità del campione *n*	α nominale 0.10	α nominale 0.075	α nominale 0.05	α nominale 0.025
10	0.087318	0.087318	0.087318	0.039736
20	0.125415	0.091808	0.091808	0.051480
30	0.113000	0.113000	0.069566	0.046464
40	0.109020	0.094273	0.064085	0.043652
50	0.109534	0.081271	0.066511	0.048394
75	0.102756	0.084172	0.065735	0.041337
100	0.114667	0.093030	0.064400	0.039730
150	0.108542	0.085610	0.065490	0.038552

Tabella 6. *Valori di* α *effettivi in corrispondenza di alcuni valori di* α *nominali per il test* (4)

Numerosità del campione *n*	α nominale 0.10	α nominale 0.075	α nominale 0.05	α nominale 0.025
10	0.087318	0.087318	0.087318	0.039736
20	0.125415	0.091808	0.091808	0.051480
30	0.113000	0.113000	0.069566	0.049668
40	0.109020	0.094273	0.064085	0.043652
50	0.109534	0.081271	0.066511	0.048394
75	0.102756	0.084172	0.065735	0.041337
100	0.114667	0.093030	0.064400	0.039730
150	0.108542	0.085610	0.063651	0.037877

Riferimenti Bibliografici

Iacobini A. (1991). *Il controllo statistico della qualità*, Editrice Universitaria di Roma – La Goliardica.

Kendall M. G., Stuart A.(1961). *The Advanced Theory of Statistics Vol. 2, Inference and Relationship*, Hafner Publishing Company, New York.

Montgomery D.C.(2000). *Controllo statistico della qualità*, McGraw-Hill.

Zenga M. (1969). Verifiche d'ipotesi della multinomiale 2×2, *Pubblicazioni dell'Università Cattolica* del *S. Cuore* – Saggi e Ricerche serie terza, Scienze statistiche – 2.

Zenga M.(1996). *Inferenza statistica,* Giappichelli, Torino.